

Romuald Kosztaluk<sup>1</sup>, Zdobysław Flisowski<sup>1</sup>

## POSTĘPY W OBLICZANIU PARAMETRÓW UKŁADÓW PRZEWÓD - ZIEMIA

**Streszczenie:** Dokonano przeglądu metod analizy układów przewód-ziemia oraz ich parametrów, decydujących o impedancji falowej i jej komponentach. Skoncentrowano się na klasycznej metodzie J.R. Carsona i na uproszczonej metodzie C. Gary z jej rozszerzeniem na układy o ograniczonej długości – wg propozycji E. Rogersa i J. White'a. Przedstawiono też metodę A.P. Sakisa Meliopoulosa, dotyczącą rozkładu prądów w poprzecznych przekrojach przewodów. Sformułowano stosowne wnioski.

**Słowa kluczowe:** układ przewód-ziemia, impedancja układu, sprzężenie przewodów, zjawisko naskórkowości.

### 1. Wstęp

Układy przewód-ziemia są podstawowymi i najczęściej stosowanymi układami sieci elektrycznych. W celu ich analizy zostały opracowane różne metody. Należą do nich: klasyczna już i najbardziej ścisła metoda J. R. Carsona [1] oraz uproszczona, ale dostatecznie dokładna [5] metoda C. Gary [2].

Wymienione metody pozwalają wyznaczyć parametry nieskończenie długich układów i wzajemne ich oddziaływanie. Układy o dowolnej długości mogą być analizowane metodą E. Rogersa i J. White'a [3], [4], polegającą na rozszerzeniu koncepcji C. Gary. Za istotne uzupełnienie tych metod można uznać metodę A.P. Sakisa Meliopoulosa [7], dzięki której mogą być analizowane rozkłady prądu w przewodach i ich impedancje wewnętrzne.

Ze względu na duże znaczenie techniczne układów przewód-ziemia uznaje się za zasadne przybliżenie istotnych szczegółów, dotyczących metod ich analizy.

### 2. Podstawowe składowe impedancji falowej układu przewód-ziemia

Impedancja falowa układu przewód-ziemia jest – jak wiadomo – charakteryzowana stałymi rozłożonymi  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$ . Ich związek z impedancją falową  $Z$  układu ma postać

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Zakład Techniki Wysokich Napięć, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

$$Z = \sqrt{(R + j\omega L) / (G + j\omega C)} = \sqrt{Z_{RL} Z_{GC}} \quad (1)$$

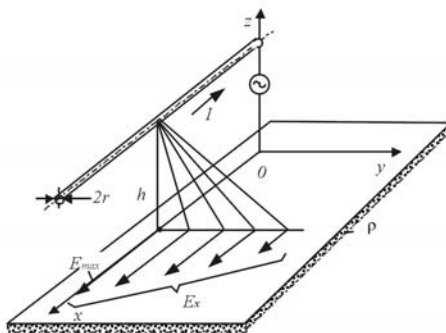
przy czym  $Z_{RL} = R + j\omega L$  jest wzdłużną impedancją własną układu przewód-ziemia i zależy w sposób dość uwikłany od właściwości gruntu. Natomiast impedancja poprzeczna  $Z_{GC} = (G + j\omega C)^{-1}$  nie stwarza problemów obliczeniowych w przypadku, gdy może być pominięta upływność izolacji. Trudności związane z wyznaczeniem impedancji  $Z_{RL}$  można pokonać stosując ścisłą metodę J.R. Carsona lub metodę uproszczoną C. Gary oraz ich rozszerzenie wg propozycji E. Rogersa i J. White'a na układy sprzężone o dowolnej długości.

### 3. Elementy metody Carsona

Impedancję własną układu złożonego z nieskończenie długiego przewodu o promieniu  $r$ , wysokości  $h$  nad ziemią o rezystywności  $\rho$  (rys. 1) Carson opisał zależnością [1]

$$Z_{RL} = Z_r + Z_{rz} + Z_T \quad (2)$$

w której  $Z_r$  – impedancja wewnętrzna przewodu,  $Z_{rz}$  – impedancja układu powierzchnia przewodu-powierzchnia ziemi, a  $Z_T$  – impedancja drogi przepływu prądu w ziemi.



**Rys. 1.** Układ przewód-ziemia;  $h$  – wysokość przewodu,  $\rho$  – rezystywność gruntu,  $I$  – prąd przemienny w przewodzie,  $E_x$  – natężenie pola elektrycznego na powierzchni ziemi

W swoich rozważaniach Carson nie wyznacza impedancji  $Z_r$ . Opisująca ją zależność jest przedstawiona w p. 4 niniejszego opracowania. Pozostałe dwie impedancje są u Carsona wyrażeniami, które w układzie jednostek SI przyjmują postać

$$Z_{rz} = j \frac{\omega \mu}{2\pi} \ln(2h / r) \quad (3)$$

$$Z_T = \frac{E_{max}}{-I} = \frac{\omega \mu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{j \exp(-2h\lambda)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega \mu / \rho}} d\lambda = (P + jQ) \quad (4)$$

przy czym:  $E_{max}$  – maksymalne natężenie pola elektrycznego na powierzchni ziemi,  $\omega$  – pulsacja,  $\mu$  – przenikalność magnetyczna,  $l$  – zmienna całkowania,  $I$ ,  $h$ ,  $r$  i  $\rho$  – wielkości objaśnione na rys. 1,  $P$ ,  $Q$  – szeregi asymptotyczne, będące funkcją parametru

$$q = 2h|k| \quad (5)$$

w którym stała propagacji

$$k \approx \sqrt{j\omega\mu / \rho} = \sqrt{\omega\mu / \rho} \exp(-j\pi / 4) \quad (6)$$

Konfrontując zależności (2), (3) i (4), można ostatecznie napisać, że impedancja własna

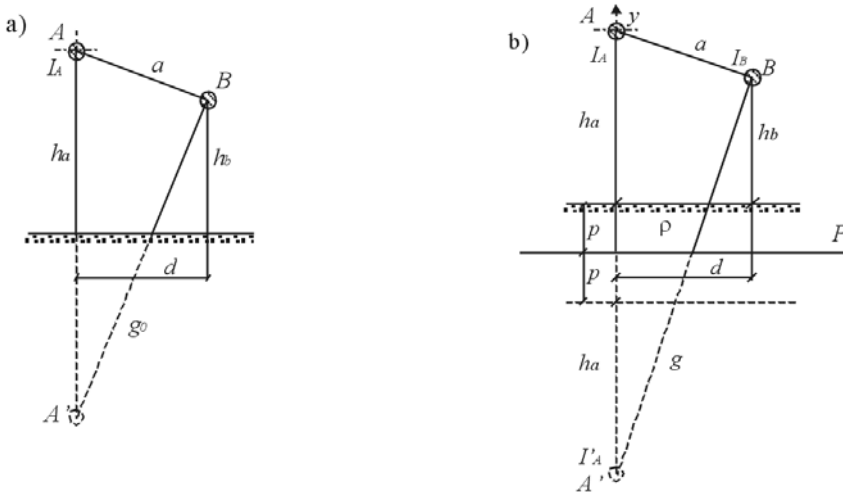
$$Z_{RL} = Z_r + j \frac{\omega\mu}{2\pi} \ln(2h/r) + \frac{\omega\mu}{\pi} (P + jQ) \quad (7)$$

Impedancja wzajemna  $Z_m$  równoległych układów przewodź-ziemia jest sumą dwu składowych

$$Z_m = Z_{AB} + Z_{Tm} \quad (8)$$

Składowa  $Z_{AB}$ , będąca impedancją wzajemną między układami: przewód A-ziemia i przewód B-ziemia (rys. 2a), może być opisana zależnością

$$Z_{AB} = j \frac{\omega\mu}{2\pi} \ln(g_0 / a) = j \frac{\omega\mu}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{(h_a + h_b)^2 + d^2} - \ln \sqrt{(h_a - h_b)^2 + d^2} \right] \quad (9)$$



**Rys. 2.** Układy z odbiciem zwierciadlanym: a) od powierzchni ziemi, b) od płaszczyzny przewodzącej  $P$  na głębokości  $p = 1/\sqrt{j\omega\mu / \rho}$ ;  $I_A, I_B$  – prądy w przewodzie  $A$  i indukowany w  $B$ ;

Natomiast składowa  $Z_{Tm}$ , będąca impedancją drogi przepływu prądu w ziemi, może być wyznaczona podobnie jak impedancja  $Z_T$  z zależności:

$$Z_{Tm} = \frac{E_B}{-I_A} = \frac{\omega\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{j \exp(-(h_a - h_b)\lambda)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu / \rho}} (\cos \lambda d) d\lambda = \frac{\omega\mu}{\pi} (P_m + Q_m) \quad (10)$$

w której:  $E_B$  – natężenie pola elektrycznego na powierzchni ziemi pod przewodem  $B$  (rys. 2a), a wielkości  $I_A, h_a, h_b, d, k, \omega, \mu, \rho$  i  $\lambda$  – jak we wzorze (4) i na rys. 2,  $P_m, Q_m$  – szeregi asymptotyczne, będące funkcją parametrów

$$m = g_0 |k| = \sqrt{[(h_a + h_b)^2 + d^2]} \omega \mu / \rho; \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{d}{h_a + h_b} \quad (11)$$

Obliczenia impedancji  $Z_{RL}$  metodą Carsona są rzadko wykonywane ze względu na skomplikowany charakter zależności opisujących impedancje  $Z_T$  i  $Z_{Tm}$ .

#### 4. Rozkład prądu w przewodzie i jego impedancja wewnętrzna

Występująca w zależnościach (2) i (7) impedancja wewnętrzna przewodu o promieniu  $r$ , została wyznaczona przez Meliopoulosa [7] przy uwzględnieniu rozkładu gęstości  $J$  prądu przemiennego w poprzecznym przekroju przewodu cylindrycznego, w funkcji odległości promieniowej  $u$  od jego osi zgodnie ze wzorem:

$$J(u) = I_{sk} \frac{b}{2\pi r} \frac{M_o(bu)}{M_1(br)} \exp j\gamma u \quad (12)$$

w którym:  $\gamma = \theta_0(bu) - \theta_1(br) + 135^\circ$ ;  $b = \sqrt{\omega \mu_o \mu_r / \rho_r}$ ;  $I_{sk}$  – wartość skuteczna prądu w przewodzie,  $\mu_o$ ,  $\mu_r$  – przenikalność magnetyczna bezwzględna i względna materiału przewodu,  $\rho_r$  – rezystywność materiału przewodu,  $M_o(bu)$ ,  $M_1(br)$  – moduły walcowych funkcji Bessela pierwszego rodzaju, a  $\theta_0(bu)$  i  $\theta_1(br)$  – jej fazy.

Zależność opisująca na podstawie wzoru (12) impedancję wewnętrzną przewodu ma postać

$$Z_r = R_{rp} + j\omega L_{rp} = \frac{\rho_r b}{2\pi r} \frac{M_o(br)}{M_1(br)} \exp j\gamma \quad (13)$$

#### 5. Elementy metody Gary

Claude Gary – realizując ideę C. Dubantona – wprowadził [2] do obliczeń impedancji doskonale przewodzącą płaszczyznę powrotu prądu (rys. 2b) na głębokości

$$p = \frac{1}{k} = 1 / \sqrt{j\omega \mu / \rho} = \sqrt{\rho / \omega \mu} \exp(-j\pi / 4) \quad (14)$$

Stosując metodę zwierciadlanego odbicia od tej płaszczyzny, uzyskuje się, przy  $h = h_A$  i promieniu przewodu  $r$ , prostą formę wyrażenia opisującego impedancję własną

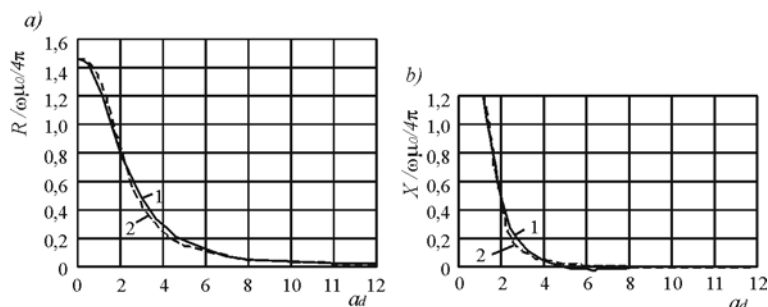
$$Z_{RL} = Z_r + j \frac{\omega \mu}{2\pi} \ln \left( \frac{h+p}{r} \right) \quad (15)$$

i wzajemną

$$Z_m = j \frac{\omega \mu}{2\pi} \ln(g/a) = j \frac{\omega \mu}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(h_a + h_b + 2p)^2 + d^2}}{a} \quad (16)$$

Dzięki prostocie i zadowalającej dokładności koncepcja C. Gary znalazła zastosowanie w analizach układów przewodów ziemia. W publikacjach [3], [4] porównano wyniki uzyskane metodą Gary i metodą Carsona (patrz rys. 3 [5]). Wykazano, że błędy metody Gary przy obli-

czeniu rezystancji dochodzą do 4%, a przy obliczaniu indukcyjności – do 10 %. Błędy te uznaje się za dopuszczalne.



**Rys. 3.** Części impedancji  $Z_m$ : a) rzeczywista i b) urojona układów równoległych w funkcji  $a_d = \sqrt{(4h^2 + d^2)}\omega\mu / \rho$ , wg [5], przy  $h = h_a = h_b$ ; metody: Carsona (krzywa 1), Gary (krzywa 2).

**Tab. 1.** Wartości parametru  $p/(1-j)$  w zależności od częstotliwości prądu  $f$  oraz rezystywności gruntu  $\rho$

Rezystywność gruntu $\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	Częstotliwość $f$ [kHz]						
	0,05	0,3	1	10	100	250	1000
Parametr $p/(1-j)$ [m]							
$10^2$	355,9	145,3	79,58	25,16	7,96	5,03	2,52
$10^3$	1125	459,4	251,6	79,58	25,16	15,91	7,96
$10^4$	3559	1453	795,8	251,6	79,58	50,33	25,16

W tabelicy 1 podano wyniki obliczeń parametru  $p/(1-j)$ . Pozwalają one ocenić zmianę głębokości  $p$  doskonale przewodzącej płaszczyzny  $P$ , umieszczonej w ziemi, w funkcji częstotliwości prądu  $f$  i rezystywności gruntu  $\rho$ . Zwraca uwagę fakt, że przy częstotliwościach odpowiadających zjawiskom piorunowym (od 100 kHz do 1 MHz) w gruntach występujących najczęściej w Polsce (od 100  $\Omega\text{m}$  do 1000  $\Omega\text{m}$ ) części rzeczywista i urojona głębokości  $p$  zawierają się w przedziale od 2,5 m do 25 m.

## 6. Układy o ograniczonej długości

Zgodnie z propozycją E. Rogersa i J. White'a [3], [4] impedancja wzajemna układu  $C_c$  o długości  $c$  i równoległego układu  $V_v$  o długości  $v$  wynosi

$$Z_m = R_m + j\omega(M_c - M_{oc}) \quad (17)$$

przy czym:  $R_m$ ,  $M_{cm}$  – rezystancja i indukcyjność wzajemna między układem  $C_c$  a układem  $V_v$ ;  $M_c$ ,  $M_{oc}$  – współczynniki, ujmujące oddziaływanie przewodu napowietrznego i odbicie zwierciadlane przewodu od płaszczyzny na głębokości  $p$ , zgodnie z zależnościami

$$M_c = c \ln \frac{A_1}{A_2} + v \ln \frac{B_1}{B_2} + N_1; \quad i \quad M_{oc} = c \ln \frac{C_1}{C_2} + v \ln \frac{D_1}{D_2} + N_2 \quad (18)$$

w których:  $A_1 = c + \sqrt{c^2 + a^2}$ ;  $B_1 = v + \sqrt{v^2 + a^2}$ ;  $C_1 = c + \sqrt{c^2 + g^2}$ ;  $D_1 = v + \sqrt{v^2 + g^2}$ ;  
 $N_1 = \sqrt{(c-v)^2 + a^2} + a - \sqrt{c^2 - a^2} - \sqrt{v^2 + a^2}$   $A_2 = c - v + \sqrt{(c-v)^2 + a^2}$ ;  
 $B_2 = v - c + \sqrt{(c-v)^2 + a^2}$ ;  $D_2 = v - c + \sqrt{(c-v)^2 + g^2}$   
 $N_2 = \sqrt{(c-v)^2 + g^2} + g - \sqrt{c^2 + g^2} - \sqrt{v^2 + g^2}$ ;  $g^2 = d^2 + (2p + h_c + h_v)^2$ ;  $a^2 = d^2 + (h_c - h_v)^2$ ;  
 $h_c, h_v$  – wysokości przewodów nad ziemią;  $d$  – długość rzutu odległości  $a$  między przewodami na powierzchnię ziemi, inne oznaczenia – jak na rys. 2.

Impedancja własna  $Z_{pL}$  układu przewod-ziemia, o długości  $l$  i promieniu przewodu  $r$ , zawieszona na wysokości  $h$ , jest – zgodnie z analizą podaną w publikacji [6] – równa

$$Z_{pl} = l(Z_{r1} + j\omega L_1) = lZ_{r1} + j \frac{\omega \mu l}{2\pi} (L_c - L_{oc}) \quad (19)$$

przy czym

$$L_c = \ln(2l - r) - 1 \quad (20)$$

$$L_{oc} = \ln \left[ l + \sqrt{l^2 + 4(p+h)^2} \right] - \ln 2(p+h) + \frac{1}{l} \left[ 2(p+h) - \sqrt{l^2 + 4(p+h)^2} \right] \quad (21)$$

$Z_{r1}$  – jednostkowa impedancja wewnętrzna przewodu,  $L_1$  – jednostkowa indukcyjność układu przewod-ziemia o długości  $l$ .

## 7. Wnioski

- Metoda J.R. Carsona, przeznaczona do obliczania parametrów układów przewod-ziemia o nieskończonej długości, ulega znacznemu uproszczeniu (z dostatecznej dokładności) dzięki koncepcji C. Gary, polegającej na skupieniu prądu w ziemi, w płaszczyźnie doskonale przewodzącej, umieszczonej na głębokości zespolonej doskonale przewodzącej płaszczyzny.
- Dzięki modyfikacjom E. Rogersa, J. White'a i pracom A.P. Sakisa Meliopoulosa istnieje możliwość rozszerzenia metody C. Gary na układy o ograniczonej długości i dokonywania obliczeń ich parametrów włącznie z impedancją wewnętrzną przewodów.
- Wynikające z modyfikacji zależności pozwalają dokonać analizy zmian impedancji układów przewod-ziemia w funkcji rezystywności gruntu, częstotliwości prądu i rodzaju materiału przewodów (stal, miedź, aluminium).

## Literatura

- [1] **Carson J.R.:** *Wave propagation in Overhead Wires with Ground Return*. BELL System Technical Journal Vol. 5, Oct. 1926, s. 539 - 554
- [2] **Gary C.:** *Approche complète de la propagation multifilaire en haute fréquence par utilisation des matrices complexes*. EDF Bull. de la Dir. Des Etudes et Recher. Serie B, No 3/4, 1976, p. 5 - 20.
- [3] **Rogers E.J., White J.F.:** *Mutual Coupling between Finite Lengths Parallel or Angled Horizontal Earth Return Conductors*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 4, No 1, Jan. 1989, p. 103 - 113.
- [4] **Rogers E.J., White J.F.:** *Mutual Coupling between Horizontal Earth Return Conductors using Actual Routing Parameters*. IEEE Trans. on Pow. Deliv. Vol. 5, No 3, July. 1990, p. 1166 - 1274.
- [5] **Tevan G., Deri A.:** *Some Remarks about the Accurate Evaluation of the Carson Integral for Mutual Impedances of lines with Earth Return*. Archiv für Elektrotechnik 67, 1984, p. 83 - 90.
- [6] **Kosztaluk R., Fortin J.:** *Mises à la terre*. IREQ, Canada. 1995.
- [7] **Saksis Meliopoulos A.P.:** *ower Systems Grounding and Transient. An Introduction*. Dekar, N.Y. and Basel, 1988.

### PROGRESS IN CALCULATIONS OF PARAMETERS OF OVERHEAD WIRES WITH GROUND RETURN

**Summary:** The methods of analysis of overhead wires with ground return sets have been reviewed together with their parameters decisive for the wave impedance and its components. The considerations have been concentrated on the classical J.R. Carson's method and on the simplified C. Gary's method with its extension to the sets with limited length in accordance with the E. Rogers and J. White proposal. Moreover the method of A.P. Saksis Meliopoulos, related to the current distribution in cross section of conductors, has been presented. Relevant conclusions have been formulated.