



Adam SKOPEC¹, Mariusz TROJNAR²

Politechnika Wroclawska (1), Politechnika Rzeszowska (2)

Modelowanie matematyczne warstwy zabrudzeniowej na powierzchni izolatora

Streszczenie. Jednym z zasadniczych czynników determinujących dobór izolatorów jest narażenie zabrudzeniowe. Powoduje ono doraźne zagrożenie awaryjne izolatorów pod napięciem roboczym. Dotyczy to, choć w różny sposób, wszystkich izolatorów napowietrznych: porcelanowych, szklanych i kompozytowych. Przewodząca warstwa graniczna (warstwa zabrudzeniowa) pomiędzy powietrzem a izolatorem stanowi istotny czynnik wpływający na rozkład natężenia pola i problemy wytrzymałościowe izolatorów. W pracy przedstawiono teoretyczne podstawy metody wyznaczania pola z zabrudzeniową warstwą przewodzącą na powierzchni izolatora.

Abstract. (Mathematical modelling contamination layer on the surface of insulator). One of essential factors to determine to choice of insulators is the contamination risk. It causes the temporary emergency threat of insulators under working voltage. This concerns, though in different expedient, all aerial insulators: porcelain, glass and composite. Conductive boundary layer (the layer of contamination) among air and insulator is the essential factor influencing on distribution of field intensity and stamina problems of insulators. In paper was introduced the theoretical bases of method of marking field with the contamination layer on the surface of insulator.

Słowa kluczowe: izolator, narażenie zabrudzeniowe izolatorów, MES, obliczanie pola.

Keywords: insulator, contamination risk, FEM, calculation of field.

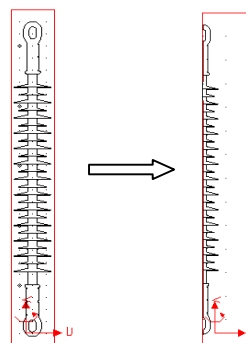
Wstęp

Powszechnie wiadomo, że jednym z zasadniczych czynników determinujących dobór izolatorów do wysokonapięciowych urządzeń napowietrznych są narażenia zabrudzeniowe. Skutki narażeń zabrudzeniowych izolatorów elektroenergetycznych mogą być doraźne bądź długotrwałe. Doraźne skutki narażenia zabrudzeniowego polegają na uszkodzeniach izolatorów pod działaniem łuków podczas przeskoków. Przebieg i pełne zwarcie między skrajnymi okuciami izolatora rozpoczyna się przy jego powierzchni, może zatem łatwo nastąpić uszkodzenie termiczne, a nawet zniszczenie izolatora. Niezpełne wyładowania zabrudzeniowe wywołują procesy starzeniowe powierzchni izolatorów przez długotrwałe oddziaływanie dużych gradientów pola elektrycznego i łuków cząstkowych. Narażenia te są niekiedy tak duże, że powodują wyraźne uszkodzenia powierzchni izolatorów porcelanowych.

Narażenie zabrudzeniowe izolacji napowietrznej to problem ogólnoswiatowy. W elektroenergetyce podejmuje się różne przedsięwzięcia - projektowe i eksploatacyjne - ograniczające jego przyczyny i skutki. Przedsięwzięcia projektowe polegają na stosowaniu izolatorów najlepiej dobranych do określonych warunków zabrudzeniowych. Proces projektowania zaczyna się od doboru materiałów i konstrukcji samych izolatorów, a kończy na optymalizacji układów izolacyjnych. Zagadnienia te szeroko omawia się w specjalistycznych podręcznikach i monografiach oraz w normie krajowej i wskazówkach IEC [1].

Główne czynniki powodujące narażenie zabrudzeniowe izolatorów to zanieczyszczenie i zawiłgocenie [2]. Zdolność izolatorów do przeciwstawiania się skutkom zanieczyszczeń może być oceniana na podstawie danych zebranych w czasie rzeczywistej pracy izolatorów lub testów laboratoryjnych. Weryfikacja przydatności izolatora (do pracy w warunkach zabrudzeniowych) w warunkach rzeczywistych pociąga za sobą długie i kosztowne badania. W laboratorium natomiast bardzo trudno jest eksperymentalnie odtwarzać wszystkie istotne czynniki, np. długotrwałe procesy gromadzenia się zanieczyszczeń na izolatorze [3]. Rozwój informatyki i związany z nim wzrost liczby specjalistycznych programów komputerowych,

umożliwia odwzorowywanie zjawisk występujących podczas pracy izolatorów w określonych warunkach środowiskowych. Wyniki symulacji komputerowych mogą weryfikować dane uzyskane podczas rzeczywistej pracy izolatorów, bądź podczas testów laboratoryjnych. Pozwala to na dokonanie w procesie konstrukcyjnym odpowiednich modyfikacji mających na celu np. wdrożenia innowacyjne, czy też poprawę własności eksploatacyjnych, jak również i związane z nimi oszczędności ekonomiczne [2]. Podczas symulacji komputerowych wykorzystuje się odpowiednio przygotowane modele matematyczne. W niniejszej pracy opisano naprzemienną metodę kolejnych przybliżeń wyznaczania pola z zabrudzeniową warstwą przewodzącą na powierzchni izolatora.

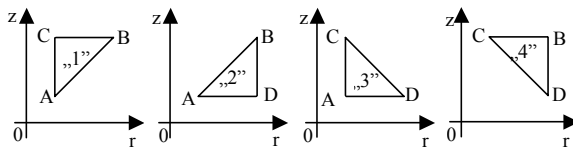


Rys.1. Przykład układu o symetrii obrotowej

Metoda elementów skończonych dla układu o symetrii obrotowej

Metoda elementów skończonych (MES) jest numeryczną metodą analizy, stosowaną do wyznaczania przybliżonego rozwiązania w wielu problemach inżynierskich. Podstawową ideą MES jest podział obszaru na skończoną ilość podobszarów (elementów). Każdy element ma węzły, z którymi są związane szukane wielkości polowe. Węzły te są rozmieszczane najczęściej na bokach i narożnikach elementów w ten sposób, że dany węzeł, a z nim i jego wielkości polowe, są wspólne dla

dwóch lub większej liczby sąsiednich elementów [4]. Często stosowanymi elementami w układach dwuwymiarowych są elementy trójkątne.



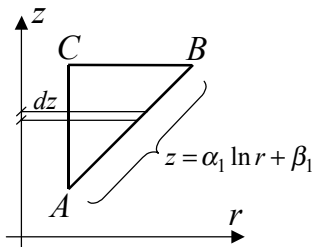
Rys.2. Rodzaje trójkątów

W układzie o symetrii obrotowej, którego przykład przedstawiono na rysunku 1, podczas podziału obszaru na skończoną ilość podobszarów (elementów) wyróżnić można cztery rodzaje trójkątów o indeksach „1”, „2”, „3” oraz „4”. Ich podział przedstawiono na rysunku 2. Dla pojedynczego trójkąta krzywoliniowego (rys.3) przyjmuje się, że:

$$(1) \quad \varphi = a \cdot \ln r + b \cdot z + c,$$

gdzie: φ - potencjał, a, b, c - współczynniki. Stąd:

$$(2), (3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = b.$$



Rys.3. Trójkąt oznaczony indeksem „1” o wierzchołkach ABC

Rozważmy trójkąt oznaczony indeksem 1 (na rysunku 2 - trójkąt ABC). Krzywa AB (rys.3) opisana jest równaniem:

$$(4) \quad z = \alpha_1 \cdot \ln r + \beta_1.$$

Współczynniki równania (4) opisane są zależnościami:

$$(5), (6) \quad \alpha_1 = \frac{z_A - z_B}{\ln \frac{r_A}{r_B}}, \quad \beta_1 = \frac{z_B \cdot \ln r_A - z_A \cdot \ln r_B}{\ln \frac{r_A}{r_B}},$$

gdzie: r_A, r_B, z_A, z_B - odpowiednie współrzędne wierzchołków A i B.

Z rysunku 3 wynikają następujące własności:

- dla linii prostej BC: $z = z_B = z_C = \text{const}$,
- dla linii prostej CA: $r = r_A = r_C = \text{const}$.

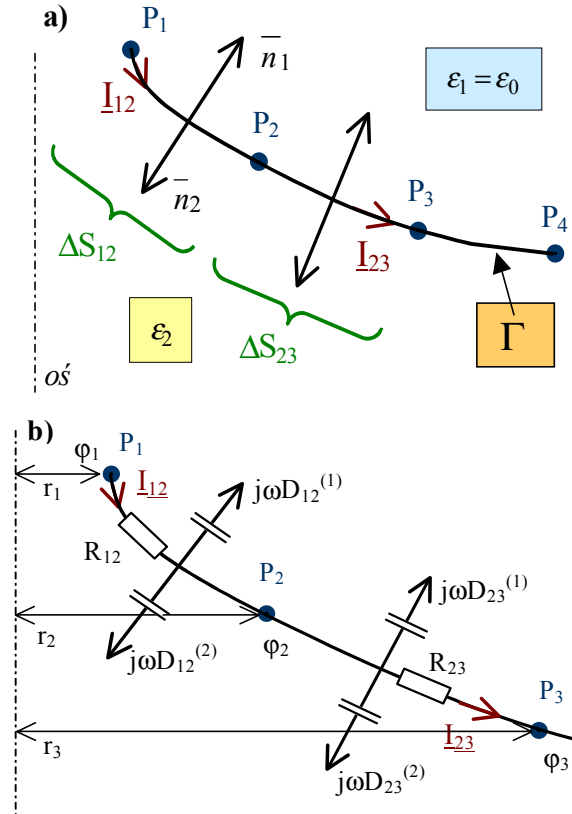
Z równania potencjału (1) dla wierzchołków A, B, C otrzymujemy zależność:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ln r_A, z_A, 1 \\ \ln r_B, z_B, 1 \\ \ln r_C, z_C, 1 \end{bmatrix}}_{K_1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = K_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \end{bmatrix}$$

W analogiczny sposób wyznaczamy współczynniki a_i, b_i, c_i dla pozostałych trójkątów („2”, „3”, „4”).

Przystosowanie klasycznej MES do obliczeń pól z cienką warstwą przewodzącą

Uwzględniając symetrię obrotową, w celu wyprowadzenia równania granicznego, rozważmy fragment obszaru granicznego pomiędzy próżnią ($\epsilon_1 = \epsilon_0$) a dielektrykiem (ϵ_2) przedstawiony na rysunku 4a. Granicę pomiędzy obszarami oznaczono literą Γ (jest to zarazem przewodząca warstwa zabrudzeniowa); P_1, P_2, P_3, P_4 - punkty na granicy Γ ; l - współrzędna wzdłuż granicy Γ .



Rys.4. Rozważany fragment brzegu izolator-powietrze (warstwa zabrudzeniowa Γ) (rys.a) oraz bilans prądu całkowitego (rys.b)

Dla wektorów \bar{n}_1 oraz \bar{n}_2 (przedstawionych na rys.4a) zachodzą relacje:

$$(8), (9) \quad \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = 0, \quad |\bar{n}_1| = 1.$$

Bilans prądu całkowitego, wynikający z rysunku 4b, przyjmuje następującą postać:

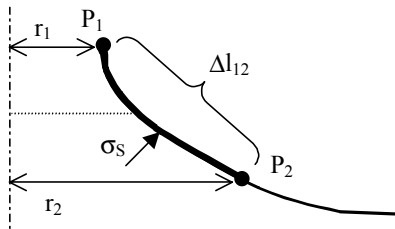
$$(10) \quad I_{12} - I_{23} = j\omega \cdot \Delta S_{12} \cdot D_{12}^{(1)} + j\omega \cdot \Delta S_{12} \cdot D_{12}^{(2)} + j\omega \cdot \Delta S_{23} \cdot D_{23}^{(1)} + j\omega \cdot \Delta S_{23} \cdot D_{23}^{(2)},$$

gdzie:

$$(11), (12) \quad I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}, \quad I_{23} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_{23}},$$

$$(13) \quad \Delta S_{12} = \Delta l_{12} \left(2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \right),$$

$$(14) \quad \Delta S_{23} = \Delta l_{23} \left(2\pi \frac{r_2 + r_3}{2} \right).$$



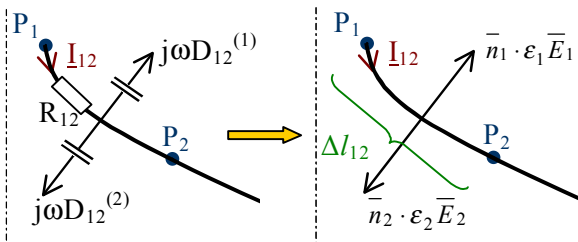
Rys.5. Przewodność powierzchniowa na brzegu *izolator-powietrze*

Z rysunku 5 wynikają zależności:

$$(15),(16) \quad G_{12} = \frac{\sigma_s \left(2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \right)}{\Delta l_{12}}, \quad G_{23} = \frac{\sigma_s \left(2\pi \frac{r_2 + r_3}{2} \right)}{\Delta l_{23}},$$

gdzie: σ_s - przewodność powierzchniowa. Dokonując przekształceń w zależnościach (15) oraz (16) otrzymujemy:

$$(17),(18) \quad R_{12} = \frac{\Delta l_{12}}{\sigma_s \left(2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \right)}, \quad R_{23} = \frac{\Delta l_{23}}{\sigma_s \left(2\pi \frac{r_2 + r_3}{2} \right)}$$



Rys.6. Uproszczony zapis graficzny brzegu *izolator-powietrze*

Na podstawie rysunku 6 można zapisać równania:

$$(19), (20) \quad \vec{n} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\nabla \varphi) \cdot \vec{n}$$

$$(21), (22) \quad \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon \cdot (-\text{grad} \varphi)$$

Dokonując przekształceń równania (22) otrzymujemy:

$$(23) \quad \vec{n} \cdot \vec{D} = \varepsilon \cdot (-\vec{n} \cdot \text{grad} \varphi),$$

$$(24), (25) \quad \vec{n} \cdot \vec{D} = -\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \vec{n} \cdot \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

Graniczna warstwa przewodząca

Po podstawieniu zależności (11), (12), (13) oraz (14) do zależności (10), a następnie, po uwzględnieniu zależności (17), (18), (23), (24) oraz (25), zależność (10), po przekształceniach, przyjmie postać równania:

$$(26) \quad \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{n_1} + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{n_2} = j \frac{2\sigma_s}{\omega} \left\{ \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (r_1 + r_2)}{[(\Delta l_{12})^2 (r_1 + r_2) + \Delta l_{12} \Delta l_{23} (r_2 + r_3)]} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (r_2 + r_3)}{[\Delta l_{12} \Delta l_{23} (r_1 + r_2) + (\Delta l_{23})^2 (r_2 + r_3)]} \right\}$$

przy czym:

φ - potencjał zespolony (zapis bez podkreślenia).

Równanie (26) jest podstawą uwzględnienia warstwy granicznej przewodzącej. Oznaczmy składnik występujący po prawej stronie równania (26) literą:

$$(27) \quad \delta = j \frac{2\sigma_s}{\omega} \left\{ \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (r_1 + r_2)}{[(\Delta l_{12})^2 (r_1 + r_2) + \Delta l_{12} \Delta l_{23} (r_2 + r_3)]} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (r_2 + r_3)}{[\Delta l_{12} \Delta l_{23} (r_1 + r_2) + (\Delta l_{23})^2 (r_2 + r_3)]} \right\}$$

Stąd równanie (26) przyjmuje postać:

$$(28) \quad \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n_1} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n_2} - \delta = 0$$

Gdy nie istnieje przewodząca warstwa graniczna, czyli gdy rozważamy izolator niezabrudzony, wtedy w MES - klasycznej spełnione jest równanie:

$$(29) \quad \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n_1} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n_2} = 0$$

przy czym $\varepsilon_j = \varepsilon_0$. Zachodzi zatem "równość" składowych normalnych indukcji po obu stronach granicy, przy czym zadanie warunku brzegowego $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_n$ jest związane z

problemem Neumanna. Gdy istnieje warstwa graniczna, czyli gdy rozważamy izolator zanieczyszczony (zabrudzony), warunki Neumanna po obu stronach granicy uogólniają się do postaci równania (26), czyli w programie obliczeniowym klasycznej MES należy uwzględnić "składnik" δ opisany równaniem (27).

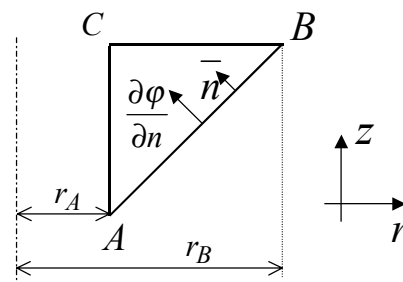
Metodę klasyczną MES z warunkami granicznymi typu Neumanna można wykorzystać stosując metodę naprzemienną.

Metoda naprzemienna

W celu dokonania obliczeń, przy użyciu komputera, należy przyjąć następujący przebieg działania:

Przybliżenie zerowe: przyjmuje się $\delta=0$ i oblicza się klasyczną MES - potencjały w punktach $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$ na granicy Γ (na brzegu *izolator-powietrze*); rys.4. W przybliżeniu zerowym oblicza się pole w „całej przestrzeni”, tj. zarówno wewnątrz izolatora, jak i w części powietrznej. Na podstawie wyznaczonego pola (znając - na podstawie obliczeń - wartości potencjałów w wierzchołkach trójkąta:

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$) oblicza się wartość składowej normalnej $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n_2}$.



Rys.7. Wyznaczenie składowej normalnej

Wektor normalny skierowany do wnętrza trójkąta:

$$(30) \quad \bar{n} = -\frac{(z_B - z_A)}{\sqrt{(z_B - z_A)^2 + (r_B - r_A)^2}} \bar{1}_r + \frac{(r_B - r_A)}{\sqrt{(z_B - z_A)^2 + (r_B - r_A)^2}} \bar{1}_z = n_r \bar{1}_r + n_z \bar{1}_z.$$

Stąd:

$$(31) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}} = -\frac{a}{r} n_r + b \cdot n_z.$$

Wartość średnią składowej na odcinku AB obliczamy z zależności (32):

$$(32) \quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}} \right\rangle = \frac{1}{r_B - r_A} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}} dr = \frac{a \cdot n_r}{r_B - r_A} \ln \frac{r_B}{r_A} + b \cdot n_z \approx \frac{2 \cdot a \cdot n_r}{r_A + r_B} + b \cdot n_z,$$

przy czym współczynniki a oraz b oblicza się z zależności (7). Analogicznie postępuje się z trójkątami oznaczonymi indeksami „2”, „3”, „4” w celu wyznaczenia składowej normalnej $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}}$ na podstawie obliczonego pola.

Przybliżenie pierwsze; oblicza się δ_1 ze wzoru (27) w sposób przybliżony, a następnie przekształcając zależność (28) oblicza się wartość:

$$(33) \quad \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1} = -\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_2} - \delta_1,$$

przy czym $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_2}$ wynika z przybliżenia zerowego.

Klasyczną MES przy obliczonych, jak wyżej, wartościach $\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1}$ oblicza się pole, ale tylko w obszarze na zewnątrz izolatora, tzn. w obszarze „powietrznym” ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$). Obszar ten ograniczony jest powierzchnią izolatora, okuciami oraz powierzchnią zewnętrzną (teoretycznie w nieskończoności, praktycznie zgodnie z przyjętymi wymiarami otoczenia, w którym znajduje się izolator). Obliczenie pola w tym „powietrznym” obszarze polega na rozwiązaniu zagadnienia Neumanna, przy zadanym warunku $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1}$ (na powierzchni izolatora) obliczonym według zależności (33). Na okuciach zadane są potencjały, a na powierzchni zewnętrznej – warunki zerowe. Z tego uzyskuje się nowe wartości potencjałów w punktach granicznych (na Γ) oraz w całym obszarze „powietrznym”. W kolejnym kroku można przystąpić do obliczenia nowej wartości $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1}$, przy wykorzystaniu zależności (30), (31) oraz (32). Równocześnie, korzystając z zależności (27), oblicza się nową wartość δ_2 (na podstawie obliczonych wartości potencjałów w części powietrznej).

Przybliżenie drugie; przekształcając zależność (28) oblicza się wartość:

$$(34) \quad \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_2} = -\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1} - \delta_2$$

przy czym $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1}$ wynika z przybliżenia pierwszego.

Klasyczną MES przy obliczonych, jak wyżej, wartościach $\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_2}$ oblicza się pole, ale tylko we wnętrzu izolatora (ε_2). Obszar ten ograniczony jest przez powierzchnię graniczną z powietrzem i okuciami. Obliczenie pola w tym obszarze polega na rozwiązaniu zagadnienia Neumanna, przy zadanym warunku $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_2}$ obliczonym według zależności (34). Na okuciach potencjały są znane. Z tego obliczenia uzyskuje się nowe wartości potencjałów w punktach granicznych (na Γ). Stąd ze wzoru (27) oblicza się kolejną δ_3 oraz nową wartość $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{n}_1}$ ze wzoru (33), a następnie przystępuje się do obliczenia pola w obszarze „powietrznym”, na zewnątrz izolatora itd. W ten sposób naprzemiennie oblicza się ciąg przybliżonych pól. Pola te są zbieżne do wartości granicznej w każdym punkcie obszaru [3].

LITERATURA

- [1] Mościcka-Grzesiak H. i inni, Inżynieria wysokich napięć w elektroenergetyce. t1., *Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej*, 1996
- [2] Mazur D., Trojnar M., Modelowanie zjawisk elektrostatycznych i mechanicznych w izolatorach, *Krajowe Sympozjum „Modelowanie i symulacja komputerowa w technice”*, Łódź, 2002, 161-164
- [3] Trojnar M., Teoretyczne podstawy naprzemiennej metody kolejnych przybliżeń wyznaczania pola z zabrudzonią warstwą przewodzącą na powierzchni izolatora, *III Ogólnopolskie Warsztaty Doktoranckie OWD*, Istebna-Zaolzie, 2001, 9-14.
- [4] Bołkowski S., Stabrowski M., Skoczylas J., Sroka J., Sikora J., Wincenciak S., *Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego*, *Wydawnictwa Naukowo-Techniczne*, Warszawa, 1993
- [5] Skopec A., Wańkiewicz J., Sikorski B., Electric Field Calculation for an Axially-symmetric Insulator with Surface Contamination, *IEEE Transaction on Dielectrics and Electrical Insulation*, April 1994, Vol.1 No.2, 332-339.
- [6] Pohl Z., Izolatory elektroenergetyczne, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*, 1995.
- [7] Subocz J., Matuszak R., Osiedanie zabrudzeń na izolatorze silikonowym, *Prace Naukowe Instytutu Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej*, 2000, nr 36, 187-195.
- [8] Łuczycki A., Skopec A., *Elektrotechnika teoretyczna. Teoria pola dla elektryków*, *Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej*, 1992.
- [9] Włodek R., Bajorek J., Obliczanie pól elektrycznych w układach elektroizolacyjnych wysokiego napięcia, *Wyd. AGH*, 1988.

Autorzy: dr hab. inż. Adam Skopec, prof. PWR, Politechnika Wrocławska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Pl. Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław, E-mail: skopec@jpee.pwr.wroc.pl; mgr inż. Mariusz Trojnar, Politechnika Rzeszowska, Zakład Podstaw Elektrotechniki i Informatyki, ul. W.Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: trojnar@prz.rzeszow.pl